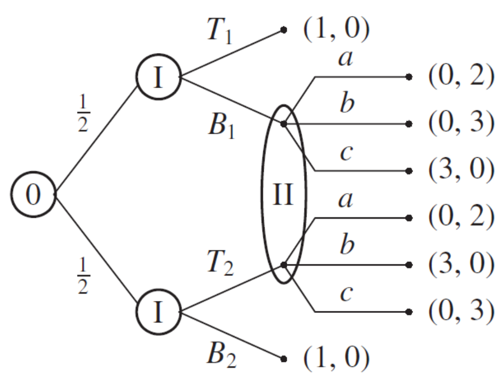
Departamento de Economia
Universidade de São Paulo
EAE-1301 - Lista 8
Prof.: Pedro Forquesato
2º semestre de 2024

Instruções: Os workshops são resolvidos em grupo **durante a aula** com a ajuda dos colegas e do docente, mas cada aluno deve *escrever e entregar a lista separadamente*. Constitui **violações do código de ética** da disciplina:

- Olhar as resoluções escritas dos colegas;
- Escrever na lista dos colegas ou trocar anotações de respostas;
- Trazer para a aula qualquer tipo de resoluções dos exercícios do workshop.

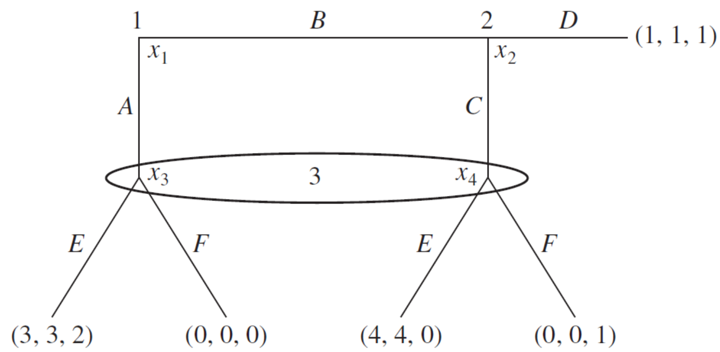
Workshop 8. Refinamentos de equilíbrio

1. **(Equilíbrios de Nash e perfeito bayesianos)** Considere o jogo em forma extensiva de informação imperfeita abaixo.

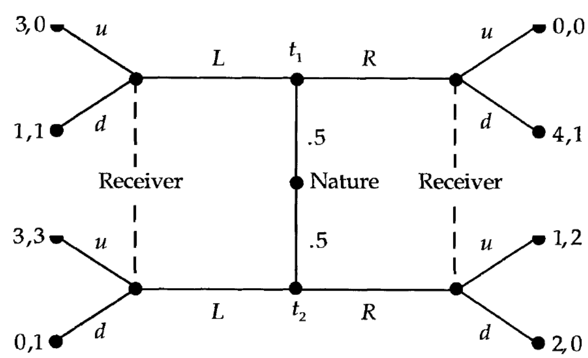


   (a) Argumente que em qualquer equilíbrio de Nash, o jogador 1 joga ou T_1 ou B_2 (dependendo do estado da natureza).
   (b) Liste todos os equilíbrios de Nash do jogo.
   (c) Quais desses equilíbrios podem ser completados (adicionando crenças) como equilíbrios perfeito bayesianos? Quais são as crenças que completam esses equilíbrios?

2. **(O cavalo de Selten)** O jogo em forma extensiva de informação imperfeita abaixo, com 3 jogadores, é conhecido (por causa de seu formato) como o cavalo de Selten, e é um clássico da teoria dos jogos também criado pelo ganhador do prêmio Nobel de 1994 Reinhard Selten. Encontre os equilíbrios de Nash do jogo. Quais deles também são perfeito bayesianos?



3. **(Comunicação)** Um tipo importante muito estudado de jogo de informação incompleta é o jogo de transmissão de informação, ou jogo de *sender-receiver*. Nesse tipo de jogo, o *sender* manda mensagens ou sinais sobre o estado da natureza (que apenas ele conhece) para o *receiver*, que usa (ou não) esse sinal para tomar uma ação. Considere o jogo abaixo.



   (a) Descreva todos os EPB em estratégias puras que são *pooling equilibrium*, isto é, em que o sinal enviado não depende do estado da natureza, e assim o receiver não descobre o estado.

   (b) E quais são os EPB que são *separating equilibrium*, isto é, em que estados diferentes implicam sinais diferentes, e portanto o receiver sabe o estado da natureza em equilíbrio?

4. **(Falar é barato)** Um dos temas mais interessantes na literatura recente de teoria dos jogos é a de transmissão de informação quando o jogador informado (o "expert") tem um viés na ação do jogador desinformado. Um exemplo bastante realista é do analista financeiro do banco informando a um cliente sobre uma ação. A ação pode ser vencedora (W), medíocre (M) ou perdedora (L), e o analista pode recomendar uma das 3 ações possíveis ao cliente: comprar (B), segurar (H) ou vender (S). Os *payoffs* do cliente e analista (respectivamente)

em cada situação (estado da natureza e ação do cliente) são dados abaixo. (Notem que isso não é uma matriz de jogo em forma normal.)

		Player 2's action a_2		
		B	H	S
	W	(2, 2)	(−1, −1)	(−2, −2)
Type of stock θ	M	(0, 1)	(1, 0)	(0, −1)
	L	(−2, 0)	(−1, 1)	(2, 0)

O analista primeiro observa o tipo real da ação e revela a sua recomendação, o comprador então decide (sem saber qual a qualidade da ação) se compra, segura ou vende.

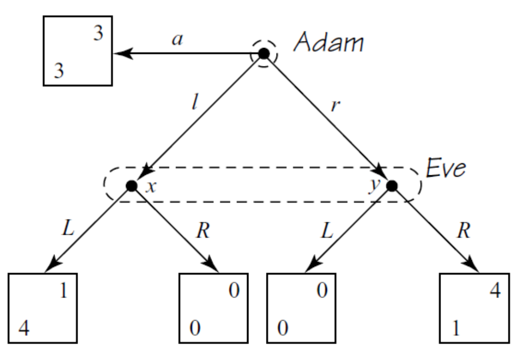
(a) Escreva o jogo na forma de um jogo em forma extensiva de informação imperfeita, fazendo a transformação de Harsanyi.

(b) Ache um EPB em que o analista não revela nenhuma informação e o cliente ignora o que analista falou. Chamamos isso de um *babbling equilibrium*.

(c) Existe algum EPB em que o analista faz uma recomendação que, se seguida, maximiza a utilidade do cliente?

(d) Qual é o equilíbrio perfeito bayesiano mais informativo desse jogo?

5. **(Indução para frente)** Considere o jogo em forma extensiva de informação imperfeita abaixo, que Binmore chama de Kohlberg's Dalek (o motivo do nome deve ser evidente para quem conhece a série inglesa Doctor Who).

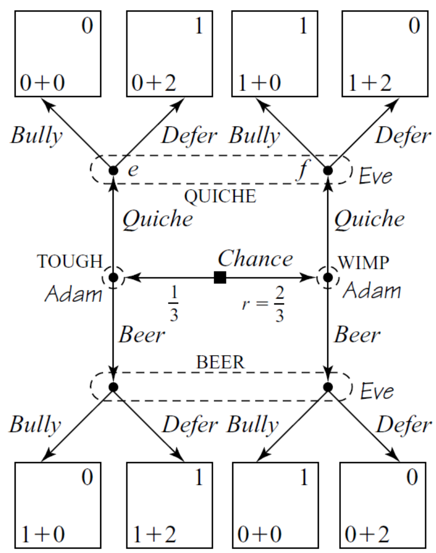


(b) Kohlberg's Dalek

(a) Encontre os dois EPBs em estratégias puras desse jogo.

(b) Pegue agora o equilíbrio em que Adam escolhe a. Se Eve for chamada a jogar, o que isso lhe diz sobre o raciocínio de Adam? Sabendo que ele poderia ter garantido *payoff* de 3 jogando a, quais crenças são razoáveis que Adam tenha sobre o que Eve irá jogar quando ela atinge o seu conjunto de informação? E o que isso nos diz sobre a razoabilidade desse equilíbrio? (Este tipo de raciocínio é chamado em teoria dos jogos de indução para frente (*forward induction*, em inglês), em contraposição ao tradicional *backward induction*, ou"indução para trás", da racionalidade sequencial.)

6. **(Cerveja ou Quiche)** Considere o jogo clássico de **sinalização** abaixo, criado pelo famoso economista e teorista dos jogos David Kreps. Adam chega em um bar e lhe é oferecido tomar cerveja ou comer quiche. Ao seu lado, Eve, uma conhecida encrenqueira, só está esperando a sua resposta para decidir se mexe com ele ou não, já que ela quer encrencar com ele se ele for fraco (*wimp*), mas não se for forte (*tough*). Já o *payoff* de Adam tem dois componentes: ele ganha 2 se ninguém o incomodar, e mais 1 se comer o que gosta (quiche se for fraco e cerveja se for forte).



(a) Kreps Quiche

(a) Caracterize o único equilíbrio perfeito bayesiano desse jogo, e mostre que ele é *parcialmente revelador*.

(b) Agora considere que a chance de Adam ser fraco, r, é $1/3$. Mostre que agora há dois EPB, ambos *pooling equilibria*.

(c) Ambos os equilíbrios do item (b) são igualmente convincentes? Argumente. Considere para isso o que Adam poderia falar para Eve, caso ele seja do tipo forte, para justificar trocar a sua estratégia de equilíbrio. (Esse raciocínio está por trás do conceito de **critério intuitivo de Cho e Kreps**, um refinamento do equilíbrio sequencial.)

7. **(Reputação de honesto)** Um aluno tem duas ideias de pesquisa que pode compartilhar com o seu orientador: uma medíocre e outra muito boa. Sem o orientador é impossível o aluno fazer a pesquisa, já que ele não sabe teoria dos jogos, mas uma vez levantada a ideia o orientador pode facilmente se apropriar dela e fazer a pesquisa sozinho.

   O aluno pode propor as ideias uma após a outra, começando pela medíocre. Se ele não acreditar no orientador, o jogo termina com *payoffs* $(0, 0)$. Se ele acreditar, e o orientador não roubar a sua ideia (medíocre), ambos ganham $(1, 1)$. Se ele roubar, os *payoffs* são $(-1, 2)$. Em seguida, o aluno decide se compartilha também a ideia boa. Se ele não o fizer, o jogo acaba com os *payoffs* anteriores. Se ele acreditar no orientador, novamente este segundo pode publicar o artigo conjuntamente em uma revista de renome, ganhando adicionais $(7, 7)$, ou roubar a ideia e publciar com o prestígio extra de ser autor único do *paper*, obtendo *payoff* extra de $(-5, 11)$. Finalmente, o orientador pode ter um *tipo de comprometimento* honesto, que não pode nunca trair a confiança do aluno, ou pode ser "estratégico", agindo de acordo com a estratégia individualmente racional. É conhecimento comum que a proporção de orientadores honestos na população é de $1/4$.

   Descreva o jogo de informação incompleta: jogadores, tipos, forma extensiva, conjuntos de informação, estratégias e funções de *payoff*. Encontre o EPB do jogo.

8. **(Negociação pré-julgamento)** Ana bateu o seu carro na motocicleta de Bernardo. Ana sabe se ela foi negligente no momento da batida, mas Bernardo não sabe. (Suponha que as duas possibilidades são equiprováveis.) Ambos sabem, porém, que se o caso for a julgamento, a verdade será descoberta pelo juiz. Ana faz uma oferta "pegar ou largar" antes do julgamento, que pode ser de 3 ou 5 mil reais. Bernardo então ou aceita a oferta (e o caso não vai a julgamento) ou rejeita, e o caso vai a julgamento, onde Ana deve pagar 6 mil ao tribunal (seja negligente ou não) e 5 mil a Bernardo caso seja negligente. Os payoffs no caso de não-negligência (esquerda) e negligência (direita) estão exibidos abaixo.

   Descreva o jogo de informação incompleta: jogadores, tipos, forma extensiva, conjuntos de informação, estratégias e funções de *payoff*. Encontre os EPBs do jogo. Sugira um critério para eliminar os equilíbrios pouco razoáveis.

	Y	N
3	$-3, 3$	$-6, 0$
5	$-5, 5$	$-6, 0$

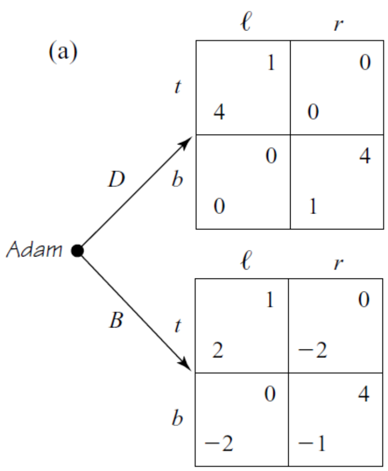
	Y	N
3	$-3, 3$	$-11, 5$
5	$-5, 5$	$-11, 5$

9. **(Indução para a frente II)** Considere novamente o *burning money game*, que já vimos na lista 5. Adam e Eve jogam uma batalha dos sexos, mas antes de começarem o jogo Adam pode decidir se queima ou não 2 dólares (ver a representação do jogo abaixo, onde convenientemente já apresento para vocês o jogo na forma normal).

   (a) Quais são os equilíbrios de Nash do jogo?

   (b) Quais desses equilíbrios sobrevive ao raciocínio de indução para frente, isto é, de que as crenças de Adam no 2o período devem ser tais que tornem a sua ação no primeiro período racional, mesmo contrafactualmente?

(a)



	$\ell\ell$	ℓr	$r\ell$	rr
Dt	4, 1	0, 0	4, 1	0, 0
Db	0, 0	1, 4	0, 0	1, 4
Bt	2, 1	2, 1	−2, 0	−2, 0
Bb	−2, 0	−2, 0	−1, 4	−1, 4

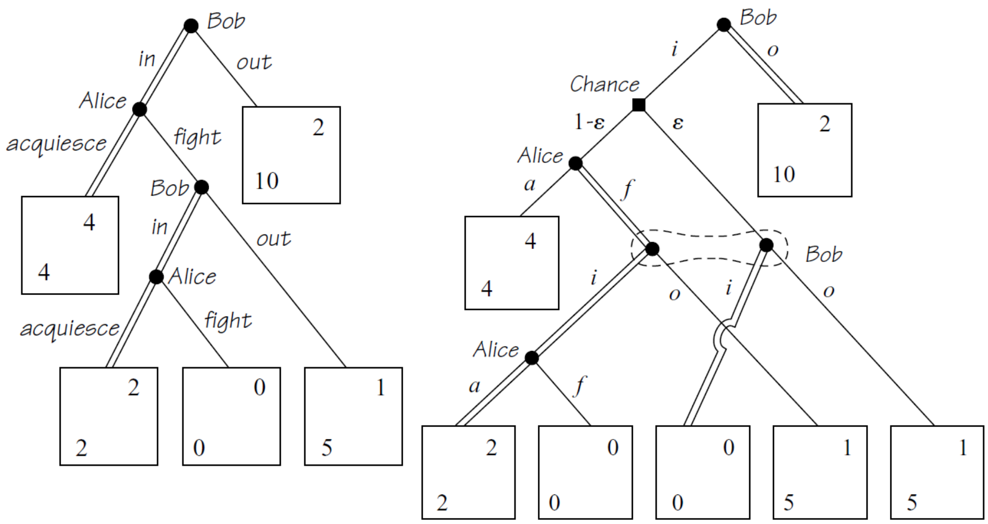
(b)

10. **(O paradoxo da cadeia de lojas revisitado)** Já vimos na lista 6 que no único equilíbrio perfeito em subjogos do jogo do "*chain-store paradox*" o concorrente sempre entra e a cadeia de lojas nunca luta, o que parece contraintuitivo dado o que imaginaríamos seria o melhor para a cadeia de lojas, especialmente se o jogo envolver vários períodos e entrantes diferentes.

    Uma forma de "resolver" esse paradoxo dentro da teoria dos jogos é dar a possibilidade de que a cadeia de lojas possa ser "tough" e sempre brigar com um entrante, o que abre a possibilidade dela querer **construir uma reputação** de ser dura.

    Resolvamos a versão mega simplificada com 1 entrante em 2 períodos do paradoxo da cadeia de lojas na figura abaixo (esquerda), onde Bob é o entrante e a Alice a cadeia de lojas, e adicionemos uma possibilidade positiva (mas que pode ser tão pequena quanto quiserem!) de que Alice seja "tough" e sempre brigue (por isso os seus pontos de decisão são removidos).

    Mostre que (não importa quão pequeno seja ϵ!) o único EPB do jogo envolve Bob desistindo de concorrer com Alice, e (no contrafactual) Alice brigando no 1o período, mesmo que não seja "tough" (i.e. construindo uma reputação).



11. **(A gangue dos quatro)** Em um artigo seminal de 1982, David Kreps, Paul Milgrom, John Roberts e Robert Wilson (o segundo e quarto recipientes do Nobel de 2020) começaram o estudo de **reputação** em teoria dos jogos, tema que já introduzimos a discussão na questão anterior.

    Nesse artigo, a "gangue dos quatro"analisa o jogo do dilema dos prisioneiros finitamente repetido, que já sabemos da lista 6 que só tem um equilíbrio de Nash (perfeito em subjogos ou não!), não importa o número de períodos.

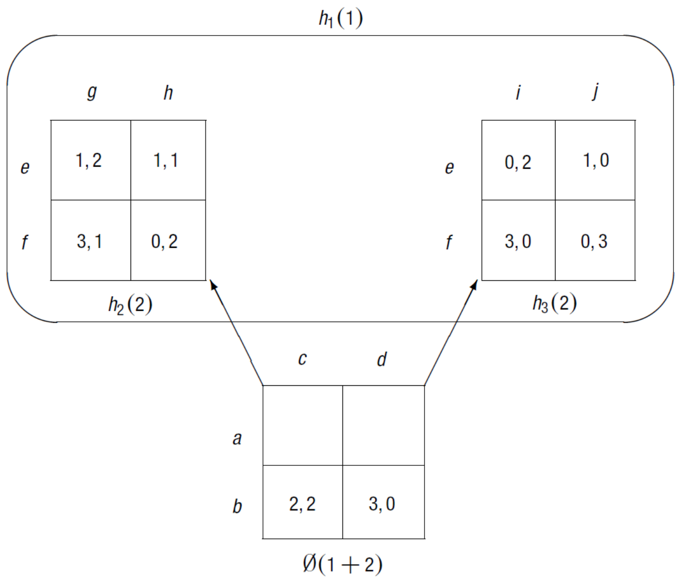
    Considere agora que o jogador 1 com probabilidade $1-p$ é racional, mas com probabilidade p joga sempre uma estratégia *tit-for-tat* (na literatura chamamos esse tipo de jogador de um *commitment type*, ou *tipo de comprometimento*). A estratégia *tit-for-tat* sempre responde uma ação do oponente com a mesma ação no período seguinte.[1]

    Analise um dilema dos prisioneiros com *payoffs* $(2,2)$, $(-1,3)$ e $(0,0)$ (o mesmo da questão 14 da lista 6), repetido 10 vezes. Mostre que se a probabilidade do jogador 1 ser irracional é $p = 1/2$, então há um equilíbrio perfeito bayesiano tal que em equilíbrio ambos os jogadores (não importa o tipo) cooperam nos primeiro 8 períodos do jogo.

12. **(Racionabilidade sequencial)** Um perfil de estratégias é chamado de *sequencialmente racionalizável* se é conhecimento comum que todos os jogadores são racionais e acreditam que o oponente é racional em todos os seus conjuntos informacionais (mas as suas crenças

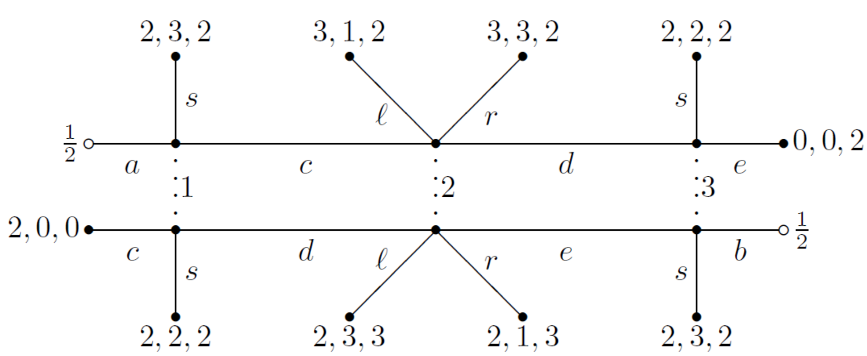
[1] A estratégia *tit-for-tat*, embora bastante simples, foi a vencedora do primeiro torneio de algoritmos para o dilema dos prisioneiros.

não precisam estar corretas). Quais são as estratégias sequencialmente racionalizáveis do jogo abaixo (e por quais crenças)?



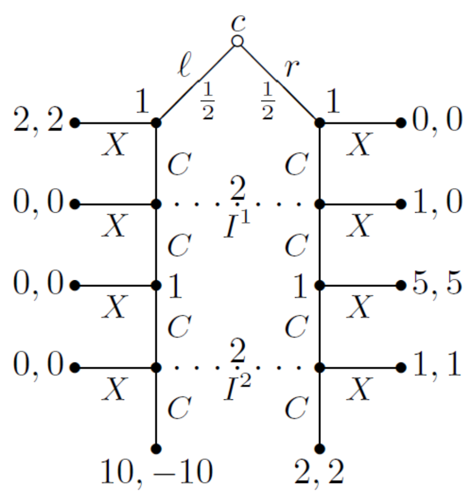
13. **(Ou vai ou volta)** Considere o jogo abaixo em forma extensiva de informação imperfeita com 3 jogadores. Com probabilidade $1/2$ o jogo começa em a e com probabilidade $1/2$ em b, mas nenhum dos 3 jogadores sabe qual é o estado da natureza correto.

    Ache os três EPBs em estratégias puras, sendo um deles no qual ambos 1 e 3 escolhem s. Quais desses equilíbrios são razoáveis?



14. **(Mudando de ideia)** O equilíbrio perfeito bayesiano (e mesmo o equilíbrio sequencial) fazem poucas restrições sobre as crenças dos agentes em conjuntos informacionais que não são

atingidos no caminho de equilíbrio. É possível até que PBEs envolvam jogadores "mudando de ideia", ao crer ser possíveis ações que em conjuntos anteriores achavam impossíveis (o que nunca pode acontecer pela regra de Bayes). Mostre que em todos os EPBs do jogo acima o jogador 2 acredita em I^1 que está no estado da natureza r com probabilidade 1, mas em I^2 acredita que está em l com probabilidade pelo menos $1/11$.



15. **(Barganha com informação incompleta)** Considere novamente o jogo de barganha de Stahl-Rubinstein da questão 14 do workshop 4, mas agora com informação incompleta. Isto é, um capitalista e um trabalhador barganham indefinidamente por um excedente de produção de 10 (mil reais). Cada período sem operar (barganhando) custa para o capitalista 2 (mil reais), mas para o trabalhador pode custar ou 1 (mil) ou 3 (mil). O trabalhador sabe qual é a sua renda no mercado informal enquanto barganha (e portanto o seu custo), mas o capitalista não. Assuma que a distribuição de trabalhadores com custo alto na população seja de 60%.

    Vimos na questão 14 da lista 4 que ter um custo de duração menor (mais poder de barganha) é extremamente poderoso nesse modelo: se o trabalhador é do tipo "poder de barganha fraco", com informação completa o capitalista absorve todo o excedente. A informação incompleta pode ajudar o trabalhador um pouco nesse quesito.

    (a) Mostre que entre os EPBs do jogo há equilíbrios *pooling*, em que o capitalista faz uma oferta a^* entre 2 e 7 (mil) e ambos os tipos de trabalhador aceitam.

    (b) Caracterize agora os *equilíbrios separadores*, em que o capitalista oferta a^* maior ou igual a 3 (mil), trabalhadores "fracos" aceitam, enquanto trabalhadores "fortes" ofertam de volta $a^* - 4$ (mil), que o capitalista aceita.