Departamento de Economia
Universidade de São Paulo
EAE-1301 - Lista 6
Prof.: Pedro Forquesato
2º semestre de 2024

Instruções: Os workshops são resolvidos em grupo **durante a aula** com a ajuda dos colegas e do docente, mas cada aluno deve *escrever e entregar a lista separadamente*. Constitui **violações do código de ética** da disciplina:

- Olhar as resoluções escritas dos colegas;
- Escrever na lista dos colegas ou trocar anotações de respostas;
- Trazer para a aula qualquer tipo de resoluções dos exercícios do workshop.

Workshop 6. Jogos multi-estágio e repetidos

1. **(Agora de novo)** Considere o jogo estático de dois jogadores abaixo, e responda:

		Player II	
		L	R
Player I	T	3, 0	1, 2
	B	2, 0	1, 5

   (a) Quais são os equilíbrios de Nash do jogo?

   (b) Agora considere que o jogo é repetido duas vezes, sendo que na segunda vez eles sabem o que foi jogado na primeira, e portanto podem condicionar a sua ação na segunda repetição ao que ocorreu na primeira.

   Escreva esse jogo em forma extensiva. Quais são os subjogos?

   (c) Ache os equilíbrios perfeitos em subjogos do jogo repetido.

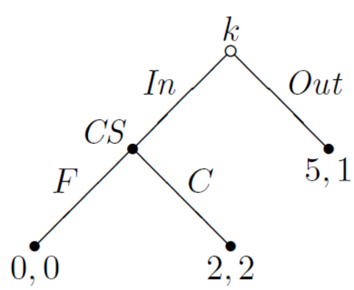
2. **(O dilema dos prisioneiros repetido)** Assim como o dilema dos prisioneiros é o jogo mais importante da teoria dos jogos, a sua versão repetida é o mais conhecido e estudado dos jogos repetidos. O livro-texto do Osborne, por exemplo, tem um capítulo inteiro apenas sobre o dilema dos prisioneiros repetido, e teremos nesse workshop nada menos que 8 questões relacionadas com esse jogo.

   O dilema dos prisioneiros, como é bem conhecido, tem o formato (por exemplo) abaixo. Imagine que esse jogo de estágio é repetido 10 vezes. Quantos ENPS o jogo repetido tem (e quais)? E quantos equilíbrios de Nash (e quais)?

	C	D
C	2,2	0,3
D	3,0	1,1

3. **(O paradoxo da cadeia de lojas)** Além do centípede, que já estudamos, outro jogo famoso que exemplifica problemas com o raciocínio de *indução para trás* é o paradoxo da cadeia de lojas (*chain-store paradox*, em inglês), apresentado por Reinhard Selten (o criador do equilíbrio perfeito em subjogos e Nobel '94).

   O jogo se dá em 100 estágios. Em cada estágio (um após o outro), o jogador 1 CS ("Pão de Açúcar") enfrenta em um mercado diferente um supermercado local (jogador 2), que decide se compete ou não com a cadeia de lojas. Se o supermercado local entrar, então o Pão de Açúcar decide se desafia ou cede à concorrência. Isto é, em cada estágio k CS joga com uma empresa diferente o jogo de *dissuasão estratégica de entrada* abaixo.



   Descreva a forma dos (muitos!) equilíbrios de Nash do jogo repetido. Qual deles é (o único) perfeito em subjogos? Por que Selten (e muitos outros) consideraram esse ENPS pouco convincente? (*Dica:* pense nas crenças dos jogadores em subjogos que não ocorrem no caminho de equilíbrio.)

4. **(Indo à caça)** As duas deusas caçadoras, Artêmis e Diana, vão todas as terças-feiras caçar na floresta. Para isso elas mandam um e-mail uma para a outra ao mesmo instante dizendo se querem ir caçar, se querem ser a capitã da caça ou se querem ser a vice-capitã. Se alguma delas decide não caçar, ou ambas querem a mesma posição, então nenhuma das duas vai. Ser capitã dá 2 utils, vice-capitã 1 util e não ir caçar 0.

   Descreva o jogo de estágio em forma normal: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Quais são os equilíbrios de Nash do jogo em um estágio? E se ele for repetido por duas vezes? Quais deles são perfeitos em subjogos?

5. **(Três podem jogar)** Há dois bares próximos à USP, e três amigos, Ana, Bernardo e Claudia, decidem onde ir beber depois da aula de teoria dos jogos. Cada um tem utilidade 2 bebendo com apenas um colega, 1 se beber com ambos, e 0 se sozinho.

   Descreva o jogo de estágio em forma normal: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Quais são os equilíbrios de Nash do jogo em um estágio? E se ele for repetido por duas vezes? Quais deles são perfeitos em subjogos?

6. **(Equilíbrio perfeito em subjogos I)** Em jogos repetidos é em geral mais difícil sustentar cooperação em equilíbrio perfeito em subjogos do que em equilíbrio de Nash, sendo o primeiro um conceito mais exigente de equilíbrio, que elimina portanto várias estratégias cooperativas que não são sequencialmente racionais.

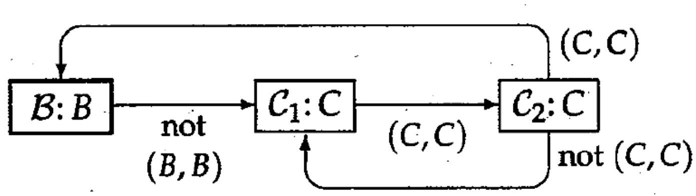
	A	D
A	$2,3$	$1,5$
D	$0,1$	$0,1$

   Considere o jogo abaixo repetido infinitas vezes, com fator de desconto intertemporal $1/2$. Construa um equilíbrio de Nash do jogo repetido que resulte em um caminho de (A, A) em todo período. Agora argumente que não existe equilíbrio perfeito em subjogos que gere um caminho igual a esse.

7. **(Equilíbrio perfeito em subjogos II)** No exemplo acima, o desconto intertemporal pequeno dificultou a criação do equilíbrio. Se os jogadores forem suficientemente pacientes, é possível sustentar diferentes caminhos de equilíbrio mesmo que só haja um equilíbrio de Nash.

   Considere o jogo abaixo, e um fator de desconto de 0.8. Verifique que a estratégia representada pelo autômato abaixo, a dizer: (i) jogar (B, B) sempre, mas se o adversário não jogar (B, B), então punir com (C, C) por 2 períodos e então, desde que ambos joguem (C, C), voltar para (B, B) é um ENPS do jogo infinitamente repetido.

	A	B	C
A	4,4	3,0	1,0
B	0,3	2,2	1,0
C	0,1	0,1	0,0



8. **(Jogos finitamente repetidos I)** Se manter cooperação perfeita em subjogos em jogos infinitos já é difícil, em jogos repetidos um número finito de vezes é ainda mais, porque temos sempre o fantasma do último período se aproximando. Ainda assim, nem sempre tudo está perdido: se o jogo tiver mais que um equilíbrio de Nash (se só tiver um não tem jeito), é possível sustentar cooperação até bem perto do final.

   Considere o jogo abaixo repetido 10 vezes. Construa um equilíbrio perfeito em subjogos em que os jogadores sustentam cooperação (C, C) por 7 períodos.

	C	D	E
C	$3, 3$	$0, 4$	$0, 0$
D	$4, 0$	$1, 1$	$0, 0$
E	$0, 0$	$0, 0$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

9. **(Jogos de soma-zero repetidos)** Considere que os jogos de soma-zero abaixo são repetidos 10 vezes (onde o jogo B é "par ou ímpar"). Quais são as estratégias $\max\min$ de cada jogador e o valor do jogo em cada um dos jogos repetidos? Eles diferem do jogo de estágio? Interprete.

A (Player I nas linhas, Player II nas colunas)

	L	R
T	4	0
B	1	5

B (Player I nas linhas, Player II nas colunas)

	L	R
T	1	0
B	0	1

10. **(Um jogo de soma-zero multi-estágio)** Considere um jogo de soma-zero de dois jogadores, em que o jogador I pode sempre jogar T (top) ou B (bottom) e o jogador II L (left) ou R (right).

    (a) No primeiro estágio, se os jogadores escolhem (T, L), jogador II paga \$1 para o jogador I e eles jogam o jogo repetido A da questão anterior.

    (b) Se escolhem (T, R), jogador II paga \$4 ao jogador I e jogam o jogo repetido B da questão anterior.

    (c) Se escolhem (B, L), jogador II paga \$2 ao jogador I e jogam o jogo repetido B da questão anterior.

(d) Se escolhem (B, R), jogador II paga \$0 ao jogador I e jogam o jogo repetido A da questão anterior.

Qual é o valor do jogo e as estratégias ótimas quando variamos o número de períodos do jogo repetido?

11. **(Dilema dos prisioneiros com custos de ajustamento)** Considere um jogo de dilema dos prisioneiros usual, em que se ambos cooperarem (C) obtêm um *payoff* de $(3, 3)$, se apenas um desviar (D) obtêm $(4, 0)$ ou $(0, 4)$ (respectivamente, se 1 ou 2 desvia) e se ambos desviarem recebem $(2, 2)$. Imagine que o jogo é repetido 10 vezes. Agora adicionemos um custo de ajustamento K que é pago sempre que um jogador alterar a sua estratégia.
    (a) Mostre que se $K = 3/2$, então o autômato descrito informalmente (formalize ele!) como: "começam jogando (C, C) e continuam jogando em todas as histórias em que o último resultado foi (C, C), caso contrário escolhem D" forma um ENPS.
    (b) Ache um ENPS que gera caminho (C, C) em todo período se $3 > K > 2$.

12. **(Jogos finitamente repetidos II)** Geralmente se interpreta a cooperação como uma busca de *payoffs* melhores para os jogadores do que o que é possível apenas repetindo a cada estágio o equilíbrio de Nash do jogo. Mas os agentes também podem coordenar para resultados *piores* que qualquer equilíbrio do jogo estático.

	A	B	C	D
A	$4, 4$	$0, 0$	$18, 0$	$1, 1$
B	$0, 0$	$6, 6$	$0, 0$	$1, 1$
C	$0, 18$	$0, 0$	$13, 13$	$1, 1$
D	$1, 1$	$1, 1$	$1, 1$	$0, 0$

    (a) Mostre que no jogo acima repetido 2 vezes, é possível gerar um equilíbrio perfeito em subjogos em que o *payoff* de cada jogador é 3, mesmo o pior equilíbrio de Nash dando *payoff* 4.
    (b) Pode parecer meio estúpido que os jogadores queiram achar estratégias com *payoff* menor que conseguiriam em equilíbrio, mas isso pode ser extremamente útil! Mostre que usando a estratégia em (a) é possível achar um equilíbrio no jogo repetido 3 vezes em que os jogadores jogam (C, C) no primeiro período, algo impossível usando apenas os equilíbrios de Nash do jogo.

13. **(Um jogo com jogadores de vida longa e de vida curta)** Em jogos repetidos infinitamente, a promessa de uma longa relação entre os jogadores faz com que eles possam criar incentivos intertemporais para permitir resultados que não sejam equilíbrios de Nash do jogo de estágio.

    Isso leva à pergunta natural se um jogador com planos de longo prazo consegue cooperar mesmo que seja com jogadores miópicos, porque duram apenas um período. A resposta, talvez surpreendentemente, é que frequentemente sim.

	h	ℓ
H	$2,3$	$0,2$
L	$3,0$	$1,1$

	h	ℓ
H	$2,3$	$1,2$
L	$3,0$	$0,1$

    Considere os jogos da figura acima, onde o jogador 1 vive infinitamente (e tem fator de desconto $1/2$), enquanto os jogadores 2 vivem cada um apenas um período, e portanto jogam sempre a melhor resposta do jogo de estágio que participam.

    (a) No jogo da esquerda, qual seria um perfil de estratégias do jogo entre dois jogadores que vivem infinitamente cujo caminho de equilíbrio perfeito em subjogos é $((H, h), (H, h), ...)$? Faz diferença se os jogadores 2 serem de vida curta? Explique.

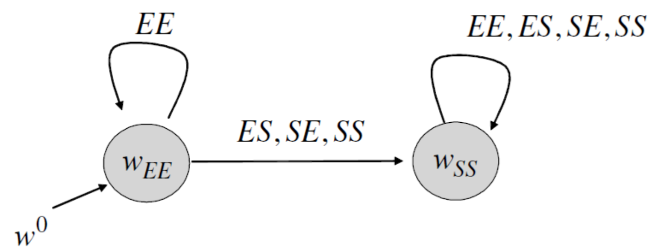
    (b) Agora considere o jogo da direita (a diferença é que agora L não é mais melhor resposta a l). Mostre que ainda assim existe um equilíbrio perfeito em subjogos em que o caminho de equilíbrio é sempre (H, h), fazendo com que a estratégia do jogador 1 dê incentivos a ele mesmo se punir em caso de desvio.

14. **(Autômatos e valores de continuação)** O que vimos nas aulas e nesse workshop mal toca a gigantesca teoria (em momentos extremamente complexa) de jogos repetidos. Em visões mais avançadas, a teoria gira em torno de *autômatos* e valores de continuação. Aqui vamos analisar o autômato mais simples possível no dilema dos prisioneiros repetido infinitamente, o *grim-trigger*, que vimos em aula.

    Considere o jogo abaixo (esquerda) e o autômato que representa o *grim-trigger* (direita). Grim-trigger é uma estratégia para o dilema dos prisioneiros repetido que começa com cooperação (E, E), mas responde a qualquer tipo de desvio com um estado de punição (S, S) para sempre.

    A ideia aqui é aplicar o princípio do desvio único, mas ao invés de checar todas as histórias, precisamos checar apenas (nesse caso) se um desvio é ótimo no estado "cooperativo"(w_{EE}) e no estado "punitivo"(w_{SS}).

	E	S
E	$2,2$	$-1,3$
S	$3,-1$	$0,0$



Para fazer isso, podemos transformar o jogo dinâmico em um jogo em forma normal para cada *estado* (aqui dois jogos, cada um de tamanho 2×2), onde a utilidade de cada perfil de estratégias é $1 - \delta$ vezes a utilidade da ação no período do desvio único mais δ vezes a utilidade nos períodos seguintes, *supondo que o resto da estratégia de todos continua igual*. (δ aqui é o fator de desconto intertemporal.) O grim-trigger é um exemplo simples pois a utilidade de continuação sempre envolve ou a cooperação ou a punição em todo o resto do jogo.

Desenhe os dois jogos na forma normal e descubra para que valores de δ a estratégia de *grim-trigger* forma um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos nesse jogo.

15. **(Equilíbrio à prova de renegociação)** O autômato da questão anterior, o *grim-trigger*, pode parecer contra-intuitivo pelo seguinte raciocínio: imagine um subjogo em que os jogadores se encontrem no estado w_{SS}, e portanto têm utilidade 0 até o fim dos tempos. Parece plausível supor que, se os jogadores pudessem se comunicar, eles falariam "Colega, e se deixarmos para trás o que passou e começarmos de novo o jogo?" Ambos com certeza concordariam, já que isso promete a eles uma utilidade de 3!

    Mas esse raciocínio nos traz um problema: se os agentes esperam no futuro poder renegociar os estados punitivos, então que incentivo eles têm de cooperar em primeiro lugar? É essa a ideia por trás do *equilíbrio à prova de renegociação*.

    Um equilíbrio (fracamente) à prova de renegociação é um equilíbrio perfeito em subjogos representado por um autômato em que nenhum estado do autômato é pior para todos que qualquer outro estado (já que no estado pior os jogadores vão renegociar). No *grim-trigger*, w_{SS} é estritamente pior que w_{EE} para todos, e portanto não é à prova de renegociação.

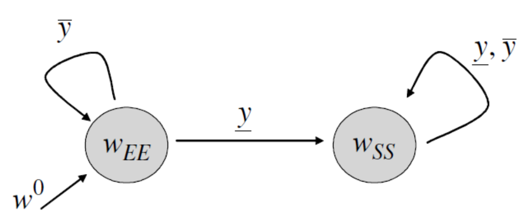
    O exemplo do *grim-trigger* parece levar a crer que não há esperança de termos equilíbrios à prova de renegociação no dilema dos prisioneiros repetido, mas não! Podemos sim construir um equilíbrio cooperativo usando estados de punição *assimétricos*, que recompensem o jogador punindo o outro. Construa um autômato desse tipo que implemente um equilíbrio à prova de renegociação no dilema dos prisioneiros repetido do exercício acima, e encontre os fatores de desconto δ para os quais é um equilíbrio.

16. **(Jogos repetidos com ações não observáveis)** Continuemos ainda com o dilema dos prisioneiros repetido da questão 14, interpretando a cooperação como esforço em um trabalho em conjunto, e a atitude não-cooperativa é evitar se esforçar. Ademais, agora temos que o esforço (do colega) não é observável: só podemos ver o resultado do trabalho, especificamente se o par tirou nota alta ($\overline{y}$) ou nota baixa ($\underline{y}$), o que é função probabilística do esforço de ambos (isto é, um modelo de *risco moral*).

    Especificamente, suponha que a probabilidade de nota alta se ambos se esforçam é $p = \frac{3}{4}$, se apenas um se esforça é $q = \frac{1}{2}$, e se nenhum se esforça $r = \frac{1}{4}$. Assim os *payoffs* de sucesso e fracasso quando o jogador se esforça ou não (já que esforço é custoso) são dados pela tabela na esquerda, abaixo, gerando *payoffs* esperados iguais aos do exercício 14. (Para quem não quiser fazer a conta, os *payoffs* são $(E, \overline{y}) = 5$, $(E, \underline{y}) = -7$, $(S, \overline{y}) = 9$ e $(S, \underline{y}) = -3$.)

    Considere o autômato abaixo, que representa uma estratégia de *grim-trigger* nesse cenário em que não é possível monitorar perfeitamente a ação do outro jogador, e restringimos atenção a *estratégias públicas*, isto é, que são funções da história pública (se nos períodos passados o trabalho teve notas altas ou baixas). A estratégia portanto começa cooperando e escolhe cooperar enquanto a nota for alta, decidindo parar de se esforçar para sempre (o *grim-trigger*) assim que tirem uma nota baixa.

	$\bar{y}$	$\underline{y}$
E	$\frac{(3-p-2q)}{(p-q)}$	$-\frac{(p+2q)}{(p-q)}$
S	$\frac{3(1-r)}{(q-r)}$	$-\frac{3r}{(q-r)}$



    Desenhe os dois jogos na forma normal (um jogo para w_{SS} e outro para w_{EE}, como no exercício 14) e descubra para que valores de δ a estratégia de *grim-trigger* de monitoramento imperfeito é equilíbrio perfeito em subjogos.[1] Explique como podemos conciliar o fato de que os jogadores eventualmente entram no *grim-trigger* com probabilidade 1 no caminho de equilíbrio (ao contrário dos casos acima, em que isso só ocorre fora do caminho de equilíbrio), *mesmo todos sabendo que os dois jogadores estão ambos sempre realizando esforço* enquanto não recebem uma nota ruim.

[1] Aqui estou sendo um pouco impreciso, o conceito correto é de *equilíbrio perfeito público*, mas podemos relevar para os nossos propósitos a diferença.