Departamento de Economia
Universidade de São Paulo
EAE-1301 - Lista 3
Prof.: Pedro Forquesato
2º semestre de 2024

Instruções: Os workshops são resolvidos em grupo **durante a aula** com a ajuda dos colegas e do docente, mas cada aluno deve *escrever e entregar a lista separadamente*. Constitui **violações do código de ética** da disciplina:

- Olhar as resoluções escritas dos colegas;
- Escrever na lista dos colegas ou trocar anotações de respostas;
- Trazer para a aula qualquer tipo de resoluções dos exercícios do workshop.

Workshop 3. Jogos de soma-zero

1. **(Par ou ímpar)** O jogo estritamente competitivo entre dois agentes mais simples é o par ou ímpar, ou na sua versão em inglês, o jogo de *matching pennies*, como na matriz abaixo, onde H pode ser um número par, T um número ímpar, e o jogador 1 escolheu par.

		Player 2	
		H	*T*
Player 1	*H*	1, −1	−1, 1
	T	−1, 1	1, −1

   Qual é a estratégia $\max\min$ dos jogadores em estratégias puras? E se permitirmos estratégias mistas? E o $\min\max$? Qual é o valor do jogo?

2. **(Risco e estratégias maxmin)** Considere o jogo abaixo entre dois jogadores.

	L	*R*
T	2, 1	2, −20
M	3, 0	−10, 1
B	−100, 2	3, 3

   (a) Ache todos os ENs do jogo. Eles são razoáveis no mundo real, quando é impossível ter certeza absoluta do que os outros jogadores irão fazer? Discuta.

(b) Agora ache as estratégias $\max\min$ dos dois jogadores e os seus *payoffs* garantidos. (Chamamos esses *payoffs* de **nível de segurança**.) Você seria racional e jogaria um equilíbrio de melhores-resposta ou "paranoico" e garantiria o seu nível de segurança nesse jogo?

3. **(Estratégias maximin e equilíbrio de Nash)** Considere o jogo abaixo, apresentado em um artigo de 1972 pelo prêmio Nobel '05 Robert Aumann e Michael Maschler.

	L	R
L	$1, 0$	$0, 1$
R	$0, 3$	$1, 0$

(a) Encontre o conjunto de ENs do jogo. Qual o *payoff* de cada jogador em equilíbrio?

(b) Agora encontre as estratégias $\max\min$ de cada jogador e seus *níveis de segurança*. Compare-os com os *payoffs* em (a). O que você jogaria nesse jogo? Discuta.

4. **(Pedra, papel, tesoura e come-come)** Esse jogo foi inventado pelo meu filho aos seus 5 anos, e é uma extensão do pedra, papel e tesoura. Esses três primeiros funcionam como no jokempô usual, mas tem uma quarta possibilidade, o "come-come", também conhecido como (se eu entendi certo) Pacman. O Come-come come a pedra e mastiga o papel, mas é cortado ao meio pela tesoura.

Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Escreva o jogo em forma normal. Qual é o equilíbrio de Nash? Qual é o valor do jogo?

5. **(Holmes vs Moriarty)** Esse jogo vem do livro original de teoria dos jogos, von Neumann and Morgenstern (1944), e se refere a um livro de Conan Doyle. Sherlock Holmes está fugindo do Professor Moriarty, que está decidido em matá-lo.

Holmes escapa para um trem, de onde vê Moriarty observando ele de fora da janela. Holmes sabe que Moriarty pode pegar um trem mais rápido e chegar à estação final, em Dover, antes dele. A sua única alternativa é sair na única estação intermediária em Canterbury.

Se Moriarty escolher Canterbury e Holmes ir até Dover, na costa, a chance de Holmes escapar é de 100%. Mas se Moriarty escolher Dover e Holmes Canterbury, estando ainda ilhado no meio da Inglaterra, a chance de Holmes escapar é apenas 50%. Se ambos saírem na mesma estação, Moriarty consegue eliminar Holmes com 100% de chance. Essas probabilidades estão representadas na tabela a seguir.

Quais são as estratégias $\max\min$ de Holmes e Moriarty e o valor do jogo?

		Moriarty: Canterbury	Moriarty: Dover
Holmes:	Canterbury	0	0.5
	Dover	1	0

6. **(Escolhendo números)** Considere um jogo de soma zero entre dois jogadores. Cada um escolhe um número entre 1 e 10. Se o número for o mesmo, jogador 1 paga 5 reais para o jogador 2. Caso contrário, o jogador 2 paga 1 real para o jogador 1.

   Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Argumente que há apenas um equilíbrio de Nash desse jogo. Qual é ele? Encontre com base nas estratégias $\max \min$. Qual é o valor desse jogo?

7. **(Coronel Blotto)** O problema do coronel Blotto surgiu pela primeira vez em uma revista de 1924, e é o seguinte: o coronel quer capturar o maior número possível de regiões em disputa com um número limitado de divisões de exército. Infelizmente, o coronel adversário também tem divisões ao seu poder que ele divide de forma a tentar frustrar o plano de Blotto.

   Considere um dos casos mais simples possíveis dessa classe de jogos: Blotto tem 4 divisões, seu inimigo 3 divisões, e há duas regiões em disputa. Blotto domina uma região se tiver estritamente mais divisões naquela região que o exército inimigo.

   Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Escreva o jogo em forma normal. Ache todos os equilíbrios de Nash do jogo.

8. **(Maxmin em jogos não estritamente competitivos)** Considere o jogo da matriz abaixo. Qual é o equilíbrio de Nash? Agora ache as estratégias $\max \min$ para os jogadores 1 e 2, e compare os seus *payoffs* com os *payoffs* de equilíbrio.

	L	R
T	6,0	0,6
B	3,2	6,0

9. **(Jogo de soma-zero com equilíbrio em estratégias puras)** Considere o jogo abaixo. Ache as estratégias $\max \min$ de cada jogador e o equilíbrio de Nash do jogo. (Chamamos esse tipo de equilíbrio de um *ponto de sela* (da matriz) do jogo.)

	L	C	R
T	1,-1	1,-1	8,-8
M	5,-5	2,-2	4,-4
B	7,-7	0,0	0,0

10. **(Jogo de Silverman)** Esse jogo de soma zero bastante estudado em matemática (com suas várias generalizações) é da seguinte forma: há dois jogadores, cada um deles escolhe um número natural. Se o número do jogador 1 for maior que o do jogador 2, mas menos que 3 vezes maior, o jogador 1 recebe 10 reais do jogador 2. Se for igual, os dois continuam como está, e nos outros casos, o jogador 1 entrega 10 reais para o jogador 2.

    Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Ache o único equilíbrio de Nash desse jogo. Argumente por que ele é único.

11. **(Morra)** Um jogo bastante comum na Roma Antiga era o *micatio*, hoje morra. (Eu também já joguei esse jogo na China, onde é um *"drinking game"* comum.) Nele, cada jogador simultaneamente levanta um número de dedos e tenta adivinhar (falando) a soma de seus dedos e do oponente. Quem acertar recebe do oponente o valor da soma, se ambos ou ninguém acertar os dois ganham nada.

    Vamos analisar uma versão simplificada do jogo que cada jogador pode levantar 1 ou 2 dedos. Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Escreva o jogo em forma normal. Ache todos os equilíbrios de Nash do jogo.

12. **(Esconde-esconde)** Jogos de "esconde-esconde" (*hide-and-seek* ou *searcher-evader*, em inglês) são jogos de soma-zero em que um jogador (*searcher*) ganha se for ao mesmo local do oponente, enquanto o outro jogador (*evader*) busca escolher um local diferente para se esconder.

    O jogo abaixo é uma versão de "esconde-esconde" proposta por O'Neill (1987), na qual o jogador 1 quer se esconder do jogador 2, exceto na ação coringa (J), onde ele ganha apenas se o local for o mesmo (algo como a frutinha do Pacman).

	1	2	3	J
1	−1, 1	1, −1	1, −1	−1, 1
2	1, −1	−1, 1	1, −1	−1, 1
3	1, −1	1, −1	−1, 1	−1, 1
J	−1, 1	−1, 1	−1, 1	1, −1

Qual é o equilíbrio de Nash do jogo? Qual é o seu valor?

13. **(Duelo barulhento)** Esse tipo famoso de jogos de soma-zero, conhecido como *noisy duel*, tem dois jogadores participando de um duelo até a morte. Eles são colocados a 1 unidade de distância um do outro, e a cada um é dada uma arma com uma única bala.

    Cada jogador escolhe quando atirar. Quanto mais perto, maior a probabilidade de acertar. Ademais, o jogador 1 tem melhor mira: a sua probabilidade de acertar é $p = 1 - d$, enquanto a probabilidade do segundo jogador acertar é $p = 1 - d^2$. Como cada arma tem apenas uma bala e o momento do tiro é conhecimento comum, se alguém atirar e errar o outro jogador pode simplesmente esperar até $d = 0$ e acertar com certeza.

    Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Ache o equilíbrio de Nash do jogo.

14. **(Duelo silencioso)** Uma variante do jogo *noisy duel* da questão anterior é o *silent duel*. A diferença aqui é que os duelistas não ficam sabendo se o oponente atirou (se ele não acertar, evidentemente). Assim, o oponente não tem como esperar até $d = 0$ para reagir caso ouça o barulho do tiro, como na questão anterior.

    Considere novamente que a distância é 1, e que cada jogador decide a distância d quando atirar, mas dessa forma imagine que para ambos a probabilidade de acerto é $p = 1 - d$. Essa variante parece similar ao jogo acima, mas é muito mais difícil de se resolver (o que não faremos aqui).

    Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Argumente que no duelo silencioso não existe equilíbrio de Nash em estratégias puras.

15. No jogo abaixo, ache uma estratégia de cada jogador que garante o mesmo *payoff* contra qualquer estratégia pura do oponente, e verifique que é a melhor estratégia disponível a eles.

		Player II		
		L	*C*	*R*
	T	3	–3	0
Player I	*M*	2	6	4
	B	2	5	6

16. **(Raciocínio de profundidade k)** Com o desenvolvimento da teoria dos jogos na segunda metade do século XX, o passo seguinte natural foi checar se as pessoas realmente se comportam da forma como previsto, e fazer alterações na teoria de forma a melhor adequá-la aos dados. Sendo um dos ramos com predições mais precisas na teoria dos jogos, os jogos soma-zero são bastante experimentados, como o jogo *hide-and-seek* abaixo.

Nesse jogo, o jogador 1 se esconde e o jogador 2 o procura. As locações que o *hider* pode se esconder (e o *seeker* procurar) são A, B, A, e A. A ideia é testar se o *framing* interfere na estratégia ótima (que aqui é simplesmente uma estratégia mista com probabilidade de 25% cada).

E interfere bastante! Em um dos muitos experimentos, as proporções dos *hiders* foram A1 (16%), B (18%), A3 (44%) e A4 (22%). Ou seja, os *hiders* assumem que as posições mais *salientes*, os As no canto e o B, têm mais chance de serem procuradas, e tentam se "esconder melhor" na opção menos saliente, que é o A do meio.

Uma teoria que explica bem esse comportamento é o *raciocínio de profundidade k*. Nele, temos 4 tipos de jogadores: o tipo $L0$ é ingênuo, e escolhe B com probabilidade $3/8$ e os As do canto com probabilidade $1/4$ cada (pois são as opções mais salientes), restando ao A central $1/8$. $L1$ usa a melhor resposta contra $L0$, $L2$ contra $L1$ e $L3$ contra $L2$.

Considerando apenas os tipos $L1$ a $L3$, e assuma que a proporção deles é igual na população, que distribuição de ações vocês encontram?

		Seeker			
		A	**B**	**A**	**A**
Hider	**A**	0, 1	1, 0	1, 0	1, 0
	B	1, 0	0, 1	1, 0	1, 0
	A	1, 0	1, 0	0, 1	1, 0
	A	1, 0	1, 0	1, 0	0, 1