Departamento de Economia
Universidade de São Paulo
EAE-1301 - Lista 2
Prof.: Pedro Forquesato
2º semestre de 2024

**Instruções:** Os workshops são resolvidos em grupo **durante a aula** com a ajuda dos colegas e do docente, mas cada aluno deve *escrever e entregar a lista separadamente*. Constitui **violações do código de ética** da disciplina:

- Olhar as resoluções escritas dos colegas;
- Escrever na lista dos colegas ou trocar anotações de respostas;
- Trazer para a aula qualquer tipo de resoluções dos exercícios do workshop.

# Workshop 2. Equilíbrio de Nash

1. **(Dilema dos prisoneiros opcional)** De longe o jogo mais discutido e estudado na teoria dos jogos é o dilema dos prisioneiros. Aqui vamos examinar uma versão um pouco expandida dele, em que a participação é opcional.

   Além da história usual dos prisoneiros, outra interpretação, essa devida ao filósofo Douglas Hofstadter, é da troca de malas fechadas. Um comprador e um vendedor trocam malas fechadas, em que se entende que dentro está o objeto vendido e na outra o dinheiro da compra. Os agentes podem cooperar (entregar a mala cheia), trair (entregar uma mala vazia) ou desistir da transação. Veja na matriz abaixo.

   | | Cooperar | Trair | Abandonar |
   |---|---|---|---|
   | Cooperar | 3,3 | -5, 5 | 0,0 |
   | Trair | 5, -5 | -3,-3 | 0,0 |
   | Abandonar | 0,0 | 0,0 | 0,0 |

   Quais são os equilíbrios de Nash desse jogo? Você observa no mundo real as pessoas trocando malas fechadas com jóias e milhares de reais dentro?

2. **(Galinha!)** Um dos jogos mais famosos em teoria dos jogos é o "chicken", baseado em uma "brincadeira"comum nos EUA no começo do século XX (ou pelo menos como representado em filmes, como no clássico Footloose), em que dois jovens correriam com o carro um na direção do outro, e o primeiro que saísse do caminho seria o covarde ("chicken").

   Se ambos desviarem é um empate, com *payoff* (por exemplo) zero. Se algum continuar e o outro desistir ele ganha, tendo a pequena (mas importante, para adolescentes) utilidade de chamar o outro de "chicken". Mas se ambos continuarem eles batem, perdendo o carro e quase certamente a vida. Uma representação possível do jogo está no gráfico abaixo. Ache todos os equilíbrios de Nash do jogo.

| | Swerve | Straight |
|---|---|---|
| Swerve | 0, 0 | -1, +1 |
| Straight | +1, -1 | -1000, -1000 |

3. **(Caça ao cervo)** Outro jogo canônico já citado é o caça ao cervo, baseado em uma fábula de Rousseau. Dois caçadores podem se unir para caçar um cervo ou caçar sozinhos lebres. Se eles ambos caçarem o cervo, eles conseguem matá-lo, conseguindo 10kg de carne cada, mas não conseguem caçá-lo sozinho. Se ambos caçarem lebres, conseguem 5kg de carne cada, e se apenas um caçar lebres consegue 8kg. Esse jogo está exposto na matriz a seguir.

| | Stag | Hare |
|---|---|---|
| Stag | 10, 10 | 1, 8 |
| Hare | 8, 1 | 5, 5 |

   (a) Quais são os equilíbrios de Nash em estratégias puras? (Aproveite e encontre o EN em estratégias mistas também.) Algum deles dá *payoff* maior a todos os agentes (i.e., é eficiente)? Chamamos esse EN de *equilíbrio payoff-dominant*.

   (b) E se tiver uma probabilidade $\epsilon$ de que o outro agente "erre a mão"e escolha a outra ação. Qual equilíbrio é melhor se $\epsilon$ não é pequeno demais? Chamamos esse EN de *equilíbrio risk-dominant*.

   (c) Qual deles você jogaria se fosse um dos caçadores? E se você e o outro jogador pudessem se comunicar antes do jogo e fazer promessas ou recomendações, isso alteraria a sua decisão? Explique.

4. **(O problema do bar El Farol)** Mais um jogo famoso é baseado em um bar em Santa Fé, o El Farol. Esse bar é muito divertido, mas pequeno. Imagine que há 10 pessoas em Santa Fé. Se até 6 forem ao bar, então elas se divertem mais que ficando em casa (que dá utilidade zero), tendo *payoff* $1/2$. Mas se mais de 6 forem, então elas ficam apertadas, obtendo *payoff* $-1/2$, e prefeririam assim ter ficado em casa (mas agora já é tarde demais porque pagaram o Uber).

   Um *jogo simétrico* é um jogo em que alterar a posição dos jogadores não altera o problema que eles enfrentam. (Se convençam que o problema do bar El Farol é um jogo simétrico!) Chamamos então um perfil de estratégias de um jogo simétrico de *estratégias simétricas* se as estratégias de todos os jogadores são iguais. Um equilíbrio em estratégias simétricas é chamado de **equilíbrio simétrico**.

(a) Esse jogo tem equilíbrio simétrico em estratégias puras? Por quê? E não simétrico?

(b) Busque um equilíbrio simétrico em estratégias mistas para o jogo.

5. **(Leilão de primeiro preço)** Cláudia está vendendo a sua casa, que Ana e Bernardo querem comprar. Ambos Ana e Bernardo valoram a casa em 1 milhão de reais, e isso é conhecimento comum. Tendo estudado teoria dos jogos, Cláudia então pede para ambos escreverem (separadamente) em um papel quanto estão dispostos a pagar, e ela então abrirá os envelopes e dará a casa pelo preço escrito para quem escrever no papel o valor maior (isso é um *leilão de primeiro-preço*).

   (a) Qual é o único equilíbrio de Nash do jogo? Por que?

   (b) E se Cláudia definir um custo de 100 mil reais para participar do leilão, o que acontece?

6. **(Guerra de Atrito)** Um jogo clássico em teoria dos jogos (proposto por Maynard Smith em 1974) é a guerra de atrito, ou em inglês *war of attrition*. Em uma das várias motivações possíveis, dois países implementam entre si embargos econômicos como forma de forçar o outro país a ceder algum território em disputa. Cada mês $t$ com sanções econômicas custa $1$ bilhão de reais igualmente para ambos os países. O território em disputa tem valor de R$10 bilhões para o país A, e R$5 bilhões para o país B.

   Embora a guerra de atrito se desenrole no tempo, podemos modelar ela como um jogo estático, em que cada país (A e B) escolhe como estratégia um tempo (contínuo) $t$ quando irá desistir. Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de payoff, e caracterize os (infinitos!) equilíbrios de Nash em estratégias puras do jogo.

7. **(O dilema do voluntário)** Considere que 10 crianças estão em uma creche, onde alguém pintou a parede de vermelho. A professora irritada diz: "Se pelo menos uma criança confessar, ela fica 1 hora sem brincar e quem não confessou pode ir para o pátio. Se ninguém confessar, todos serão ficarão a tarde inteira sem brinquedo." Considere que a utilidade de brincar é de 1/hora e uma tarde tem 5 horas. Escreva o jogo em forma normal e ache os seus equilíbrios de Nash em estratégias puras e um equilíbrio simétrico em estratégias mistas. Nesse equilíbrio em estratégias mistas, se o número de crianças aumentar, o que acontece com a probabilidade de alguma delas confessar?

8. **(Equilíbrio correlacionado)** Na Batalha dos Sexos (em aula), o equilíbrio correlacionado nos deu um resultado mais justo que os equilíbrios de Nash em estratégia pura, e mais eficiente que o equilíbrio misto. Mas ele pode ser até mais poderoso que isso.

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $6,6$ | $2,7$ |
| $B$ | $7,2$ | $0,0$ |

Ache um equilíbrio correlacionado do jogo de "chicken" acima, isto é, estratégias mistas dos agentes que são correlacionadas entre si (por observarem o mesmo sinal público) que gere uma soma de *payoffs* dos agentes maior que em qualquer equilíbrio de Nash do jogo (há 3 deles).

9. **(Refinando o equilíbrio de Nash I)** Às vezes, alguns equilíbrios de Nash não condizem com a nossa intuição sobre o que seria uma estratégia sensata em cada situação. Assim, a literatura buscou eliminar equilíbrios "pouco razoáveis", levando a várias formas de **refinamentos** do Equilíbrio de Nash, isto é, condições de equilíbrio que são mais restritivas.

   Um refinamento importante, devido a Reinhard Selten (Nobel '94), é o *equilíbrio trembling-hands perfect*. Considere o jogo abaixo, onde A e B são números quaisquer maiores que zero (por exemplo, 10).

   | | L | M | R |
   |---|---|---|---|
   | U | 1,1 | 0,0 | 1,1 |
   | M | 0,0 | 0,0 | 0,$B$ |
   | D | 1,1 | $A$,0 | 1,1 |

   (a) Quantos equilíbrios de Nash tem o jogo? Quais são eles?

   (b) Agora, considere que os jogadores são "cautelosos", crendo que os oponentes possam ter "mãos trementes" e errarem com uma probabilidade $\varepsilon$ muito pequena. Um equilíbrio de Nash então é **trembling-hands perfect** quando as estratégias do perfil de equilíbrio são sempre melhores respostas a *estratégias completamente mistas* dos oponentes que sejam suficientemente próximas do equilíbrio original ($\varepsilon$ suficientemente próximo de zero). Ache os equilíbrios de Nash do jogo que são *trembling-hands perfect*.

10. **(Refinando o equilíbrio de Nash II)** Embora importante, o *equilíbrio trembling-hands perfect* também não é sempre convincente, como argumentou Roger Myerson (Nobel '07),

já que ele pode ser sensível à adição de estratégias estritamente dominadas (como se pode ver em uma variante do exercício anterior).

Ele propôs então a ideia de **proper equilibrium**, em que não apenas consideramos que os agentes sempre podem errar (portanto só aceitamos estratégias completamente mistas), mas adicionamos a restrição de que ações que dão um *payoff* menor (dadas as estratégias de equilíbrio do restante) sejam infinitamente menos prováveis nesses erros que ações que dão utilidade maior. Considere o jogo abaixo proposto por Myerson em seu artigo original de 1978:

$\Gamma_2$:

| | $(U_1,U_2)$ | Player 2: $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ |
|---|---|---|---|---|
| Player 1 | $\alpha_1$ | 1, 1 | 0, 0 | -9,-9 |
| | $\alpha_2$ | 0, 0 | 0, 0 | -7,-7 |
| | $\alpha_3$ | -9,-9 | -7,-7 | -7,-7 |

(a) Quantos são os equilíbrios de Nash do jogo? Quais?

(b) Quais deles são *trembling-hands perfect*?

(c) E *proper equilibria*? Interprete por que equilíbrios são eliminados por cada refinamento.

11. Ache os equilíbrios de Nash dos jogos abaixo.

| | | Player II: $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Player I | $\gamma$ | 7, 3 | 6, 3 | 5, 5 | 4, 7 |
| | $\beta$ | 4, 2 | 5, 8 | 8, 6 | 5, 8 |
| | $\alpha$ | 6, 1 | 3, 8 | 2, 4 | 6, 9 |

Game A

| | | Player II: $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Player I | $\delta$ | 5, 2 | 3, 1 | 2, 2 | 4, 5 |
| | $\gamma$ | 0, 3 | 2, 2 | 0, 1 | −1, 3 |
| | $\beta$ | 8, 4 | 7, 0 | 6, −1 | 5, 2 |
| | $\alpha$ | 0, 5 | 1, −2 | 2, 2 | 3, 4 |

Game B

| | | Player II: $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Player I | $\epsilon$ | 0, 0 | −1, 1 | 1, 1 | 0, −1 |
| | $\delta$ | 1, −1 | 1, 0 | 0, 1 | 0, 0 |
| | $\gamma$ | 0, 1 | −1, −1 | 1, 0 | 1, −1 |
| | $\beta$ | −1, 1 | 0, −1 | −1, 1 | 0, 0 |
| | $\alpha$ | 1, 1 | 0, 0 | −1, −1 | 0, 0 |

Game C

12. **(Três jogadores)** Ache os equilíbrios de Nash do jogo com 3 jogadores abaixo.

$\alpha$

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $A$ | $0, 0, 5$ | $0, 0, 0$ |
| $B$ | $2, 0, 0$ | $0, 0, 0$ |

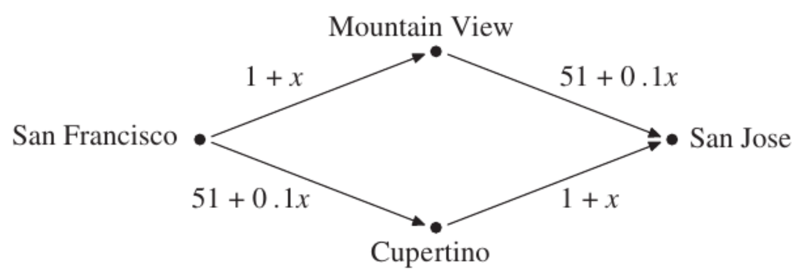
$\beta$

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $A$ | $1, 2, 3$ | $0, 0, 0$ |
| $B$ | $0, 0, 0$ | $1, 2, 3$ |

$\gamma$

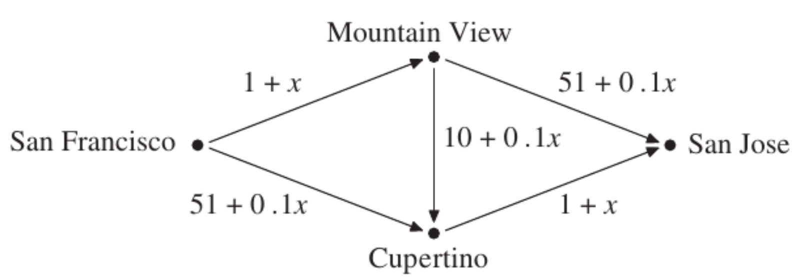
| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $A$ | $0, 0, 0$ | $0, 0, 0$ |
| $B$ | $0, 5, 0$ | $0, 0, 4$ |

13. **(Paradoxo de Braess)** Para ir de São Francisco para San José as pessoas podem ir pelas montanhas ou por Cupertino. O tempo de deslocamento depende do número de carros, como na figura abaixo, onde $x$ é o número de carros que escolhem, a cada momento, transitar por aquela via. São 60 carros transitando pela região em um dado momento.



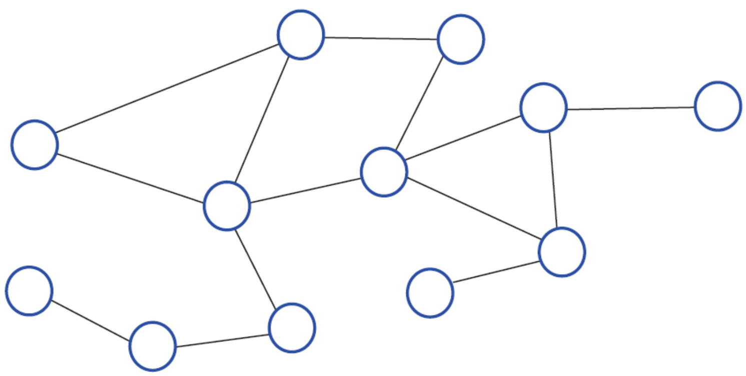

(a) Quais são os equilíbrios? Quanto demora para ir de São Francisco para San José?

(b) E se construirmos uma rodovia entre as montanhas e Cupertino como na segunda figura abaixo? O que acontece com o tempo de viagem? Por que essa situação é considerada paradoxal?




14. **(Jogos em redes sociais)** Considere a versão abaixo de um jogo de bem público "best-shot". Por exemplo, considere que cada aluno de teoria dos jogos pode assinar um serviço

de *streaming* a um custo $1$ e compartilhar com os seus amigos. (Assuma que os jogadores gostam de seus amigos, e preferem compartilhar a custo zero a conta que não o fazer.) Já assistir *streaming* dá utilidade $2$. Imagine que o grafo de amizades dos alunos de teoria dos jogos seja do formato abaixo, onde cada nódulo é um aluno e um vértice representa amizade. Caracterize os equilíbrios de Nash do jogo e dê um exemplo.



15. **(Equilíbrio correlacionado com três jogadores)** Considere o jogo apresentado na matriz abaixo, com três jogadores.

$A$:

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $0,0,3$ | $0,0,0$ |
| $B$ | $1,0,0$ | $0,0,0$ |

$B$:

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $2,2,2$ | $0,0,0$ |
| $B$ | $0,0,0$ | $2,2,2$ |

$C$:

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $0,0,0$ | $0,0,0$ |
| $B$ | $0,1,0$ | $0,0,3$ |

Quais são os equilíbrios de Nash em estratégias puras? Ache um *equilíbrio correlacionado* em que o agente 3 escolhe $B$ e os agentes 1 e 2 escolhem $(T, L)$ e $(B, R)$ com probabilidade igual. O agente B gostaria de observar o sinal comum usado no equilíbrio ou não?

16. **(Implementação)** Nesse curso focaremos na teoria dos jogos clássica, que é dado um jogo "resolvê-lo". Mas existe um braço da teoria dos jogos que faz o contrário: dado um resultado de interesse, criar um jogo (interpretamos como um contrato ou uma instituição) cujo único equilíbrio seja o resultado que buscamos. Dizemos então que tal jogo *implementa* a nossa escolha social.

Considere uma economia com duas pessoas (1 e 2) e dois bens (1 e 2). Cada um começa com uma unidade do bem de mesmo número e zero do outro. Há duas situações possíveis, que *ambos* os agentes sabem qual é a real (é conhecimento comum), mas o planejador não sabe.

No estado de mundo $(R^1, R^2)$, ambos os agentes têm utilidade $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$ (i.e. Cobb-Douglas). No estado de mundo $(\overline{R}^1, R^2)$, a utilidade de 2 ainda é a mesma, mas o agente 1 tem preferência $\overline{U}^1(x_1, x_2) = x_2 - \frac{1}{1+x_1}$.

O equilíbrio de livre-mercado, que queremos copiar sem ter um mercado, se vocês fizeram micro II, é de $(1/2, 1/2)$ para cada, no primeiro caso, e $(1/2, 7/9)$ para o agente 1 e $(1/2, 2/9)$ para o agente 2 no segundo caso. (Não precisam calcular nada disso, já estou afirmando.)

**Table 1.**

| | | Individual 2<br>$R^2$ |
|---|---|---|
| Individual 1 | $R^1$ | $x^1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $x^2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ |
| | $\bar{R}^1$ | $x^1 = (\frac{1}{2}, \frac{7}{9})$, $x^2 = (\frac{1}{2}, \frac{2}{9})$ |

**Table 2.**

| | | Individual 2 | |
|---|---|---|---|
| | | Left | Right |
| Individual 1 | $R^1$ | $x^1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $x^2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ | $x^1 = (\frac{11}{18}, \frac{2}{3})$, $x^2 = (\frac{7}{18}, \frac{1}{3})$ |
| | $\bar{R}^1$ | $x^1 = (0, 1)$, $x^2 = (1, 0)$ | $x^1 = (\frac{1}{2}, \frac{7}{9})$, $x^2 = (\frac{1}{2}, \frac{2}{9})$ |

(a) Um jogo como na Tabela 1 em que o agente 1 reporta a sua preferência consegue implementar a solução de livre-mercado para cada perfil de preferências $(R^1, R^2)$ e $(\overline{R}^1, R^2)$?

(b) E o jogo na Tabela 2 consegue implementar a decisão de mercado em Equilíbrio de Nash? Qual é a intuição disso?