

Instruções: Os workshops são resolvidos em grupo **durante a aula** com a ajuda dos colegas e do docente, mas cada aluno deve *escrever e entregar a lista separadamente*. Constitui **violações do código de ética** da disciplina:

- Olhar as resoluções escritas dos colegas;
- Escrever na lista dos colegas ou trocar anotações de respostas;
- Trazer para a aula qualquer tipo de resoluções dos exercícios do workshop.

Workshop 2. Outros jogos estáticos de informação completa

1. **(O dilema do viajante de Basu)** O economista Kaushik Basu criou esse jogo famoso em 1994, que, como alguns outros jogos que veremos adiante no curso, critica a noção de racionalidade da teoria dos jogos: ele imagina a situação na qual uma companhia aérea perdeu as malas de dois viajantes, e quer que eles revelem o valor real dos conteúdos para a companhia fazer a compensação.

Acontece que por coincidência o valor das duas malas é o mesmo, já que eles compraram antiguidades iguais no destino em que estavam, e é um valor entre 100 e 400 reais. Então a companhia aérea propõe o seguinte procedimento: cada viajante separadamente vai escrever um valor de 100, 200, 300 ou 400 em um pedaço de papel. Cada viajante vai receber o menor dos dois valores reportados, mas se o valor for diferente entre os dois viajantes, o menor valor vai receber um bônus de 125 reais (por ser honesto) e o maior valor uma penalidade de 5 reais. (Por exemplo, se J1 ofertar 100 reais e J2 200, então J1 recebe 225 ($100 + 125$) e J2 recebe 95 reais ($100 - 5$).)

Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Escreva o jogo na forma normal e descubra quais estratégias são racionalizáveis para os dois viajantes. Você consegue ver por que esse é um dilema?¹

2. **(Leilão de primeiro preço)** Cláudia está vendendo a sua casa, que Ana e Bernardo querem comprar. Ambos Ana e Bernardo valoram a casa em 1 milhão de reais, e isso é conhecimento comum. Tendo estudado teoria dos jogos, Cláudia então pede para ambos escreverem (separadamente) em um papel quanto estão dispostos a pagar, e ela então abrirá os envelopes e venderá a casa pelo preço escrito para quem escrever no papel o valor maior (isso é um *leilão de primeiro-preço*). Em caso de empate, a casa é sorteada entre Ana e Bernardo (e apenas quem venceu o sorteio paga o valor escrito).

¹Uma discussão ótima desse dilema pelo próprio Kaushik Basu para a revista Scientific American está disponível em <https://www.scientificamerican.com/article/the-travelers-dilemma/>.

- (a) Qual é o único equilíbrio de Nash do jogo? Por que?
- (b) E se Cláudia definir um custo de 100 mil reais para participar do leilão, o que acontece? (Considere que os jogadores agora podem decidir não participar do jogo, obtendo *payoff* zero.)
3. **(Racionalidade no modelo de Hotelling)** Há sete quarteirões alinhados em uma reta por uma rua. Dois pizzaiolos decidem simultaneamente em qual quarteirão abrir a sua pizzeria. Em cada quarteirão moram 50 pessoas, que vão comer na pizzeria que estiver mais próxima de sua casa. (Caso a distância seja igual metade come em cada.) O lucro com cada pizza é de \$1.
- (a) Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Quais estratégias são racionais?
- (b) E se os agentes souberem que o outro pizzaiolo também é racional?
- (c) E se os pizzaiolos souberem que o outro pizzaiolo sabe que ele é racional?
- (d) E se houver conhecimento comum de racionalidade?
4. **(Leilão de segundo-preço)** Um livro autografado de teoria dos jogos será vendido em um leilão. (Veremos mais sobre leilões em outros workshops do curso.) Há N participantes, cada um com uma valoração própria de v_i para o livro, que é um número fixo dado e de conhecimento comum. Cada participante escreve o seu *bid* b_i em um papel. Todos os *bids* são abertos e o item é dado para o *bid* maior. (Em caso de empate, é dado para cada um dos empatados com probabilidade igual.) Mas o preço pago pelo vencedor é o *segundo* maior valor oferecido. Suponhamos como na questão 2 que em caso de empate o bem é sorteado.
- Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Mostre que para cada participante i , fazer um *bid* b_i igual à sua valoração v_i para o item é uma estratégia fracamente dominante. Quantos equilíbrios de Nash há no jogo?
5. **(O problema do bar El Farol)** Mais um jogo famoso é baseado em um bar em Santa Fé, o El Farol. Esse bar é muito divertido, mas pequeno. Imagine que há 10 pessoas em Santa Fé. Se até 6 forem ao bar, então elas se divertem mais que ficando em casa (que dá utilidade zero), tendo *payoff* $1/2$. Mas se mais de 6 forem, então elas ficam apertadas, obtendo *payoff* $-1/2$, e prefeririam assim ter ficado em casa (mas agora já é tarde demais porque pagaram o Uber).

Um *jogo simétrico* é um jogo em que alterar a posição dos jogadores não altera o problema que eles enfrentam. (Se convençam que o problema do bar El Farol é um jogo simétrico!) Chamamos então um perfil de estratégias de um jogo simétrico de *estratégias simétricas* se as estratégias de todos os jogadores são iguais. Um equilíbrio em estratégias simétricas é chamado de **equilíbrio simétrico**.

- (a) Esse jogo tem equilíbrio simétrico em estratégias puras? Por quê? E não simétrico?
- (b) Busque um equilíbrio simétrico em estratégias mistas para o jogo.

6. **(Adivinhe 2/3 da média)** Em 1981, Alain Ledoux inventou esse jogo como um desempate em sua revista *Jeux et Stratégie*, como forma de "investigar a profundidade de raciocínio" dos leitores. Desde então ele se tornou um clássico na teoria dos jogos.

O jogo é simples: cada participante escreve um número (para os nossos propósitos um inteiro entre 1 e 20) em um papel, e ganha quem acertar mais próximo de $2/3$ da média dos números apostados (se for empate dividem o dinheiro). (Ao contrário do famoso "curso de beleza" de Keynes, que as pessoas tentam acertar a média.)

Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Ache o perfil de estratégias que sobrevivem eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas.

7. **(Guerra de Atrito)** Um jogo clássico em teoria dos jogos (proposto por Maynard Smith em 1974) é a guerra de atrito, ou em inglês *war of attrition*. Em uma das várias motivações possíveis, dois países implementam entre si embargos econômicos como forma de forçar o outro país a ceder algum território em disputa. Cada mês t com sanções econômicas custa 1 bilhão de reais igualmente para ambos os países. O território em disputa tem valor de R\$10 bilhões para o país A, e R\$5 bilhões para o país B. Quando qualquer jogador desiste do território, a guerra (o jogo) acaba *imediatamente* e o território se torna posse do outro país.

Embora a guerra de atrito se desenrole no tempo, podemos modelar ela como um jogo estático, em que cada país (A e B) escolhe como estratégia um tempo (contínuo) t quando irá desistir. Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*, e caracterize os (infinitos!) equilíbrios de Nash em estratégias puras do jogo.

8. **(Soma 100)** Considere um jogo de dois jogadores, cada um deles escolhe (separadamente) um número. Se a soma dos dois números é menor ou igual a 100, então cada um recebe o número que escolheu. Se a soma for maior que 100, então o jogador que propor o menor número b_i recebe o que propôs, enquanto o outro que propôs $b_j > b_i$ recebe $100 - b_j$. Se houver empate, cada um recebe 50.

Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Mostre que o jogo é *resolúvel por dominância* e resolva-o.

9. **(Coronel Blotto)** O problema do coronel Blotto surgiu pela primeira vez em uma revista de 1924, e é o seguinte: o Coronel Blotto ataca um país inimigo usando um número fixo de divisões de exército. Infelizmente, o Inimigo também tem divisões ao seu poder que ele divide de forma a tentar frustrar o plano de Blotto.

Considere um dos casos mais simples possíveis dessa classe de jogos: Blotto tem 4 divisões, seu inimigo 3 divisões, e há duas regiões em disputa. Blotto ou o seu inimigo dominam uma região se tiverem estritamente mais divisões naquela região que o exército inimigo, caso o contrário há um empate. Ganha a guerra quem tiver mais territórios ao fim do combate.

Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Escreva o jogo em forma normal. Ache todos os equilíbrios de Nash do jogo.

10. **(O dilema do voluntário)** Considere que 10 crianças estão em uma creche, onde alguém pintou a parede de vermelho. A professora irritada diz: “Se pelo menos uma criança confessar, ela fica 1 hora sem brincar e quem não confessou pode ir para o pátio. Se ninguém confessar, todos serão ficarão a tarde inteira sem brinquedo.” Considere que a utilidade de brincar é de 1/hora e uma tarde tem 5 horas. Ache os equilíbrios de Nash em estratégias puras e um equilíbrio simétrico em estratégias mistas desse jogo. Nesse equilíbrio em estratégias mistas, se o número de crianças aumentar, o que acontece com a probabilidade de alguma delas confessar?

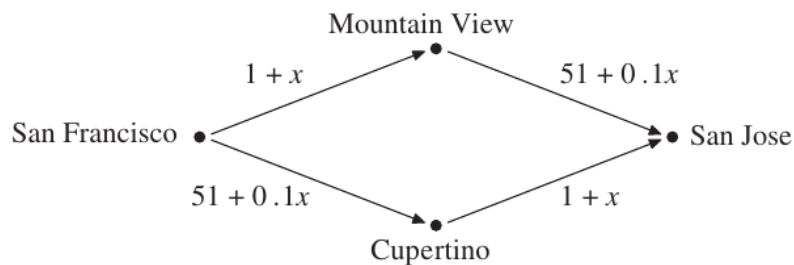
11. **(Jogo de Silverman)** Esse jogo de soma zero bastante estudado em matemática (com suas várias generalizações) é da seguinte forma: há dois jogadores, cada um deles escolhe um número natural. Se o número do jogador 1 for maior que o do jogador 2, mas menos que 3 vezes maior, o jogador 1 recebe 10 reais do jogador 2. Se for igual, os dois continuam como está, e nos outros casos, o jogador 1 entrega 10 reais para o jogador 2.

Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Ache o único equilíbrio de Nash desse jogo. Argumente por que ele é único.

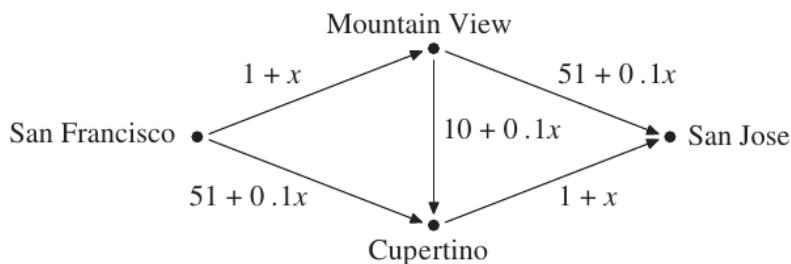
12. **(Morra)** Um jogo bastante comum na Roma Antiga era o *micatio*, hoje morra. (Eu também já joguei esse jogo na China, onde é um “*drinking game*” comum.) Nele, cada jogador simultaneamente levanta um número de dedos e tenta adivinhar (falando) a soma de seus dedos e do oponente. Quem acertar recebe do oponente o valor da soma, se ambos ou ninguém acertar os dois ganham nada.

Vamos analisar uma versão simplificada do jogo que cada jogador pode levantar 1 ou 2 dedos. Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Escreva o jogo em forma normal. Ache todos os equilíbrios de Nash do jogo.

13. **(Paradoxo de Braess)** Para ir de São Francisco para San José as pessoas podem ir pelas montanhas ou por Cupertino. O tempo de deslocamento depende do número de carros, como na figura abaixo, onde x é o número de carros que escolhem, a cada momento, transitar por aquela via. São 60 carros transitando pela região em um dado momento.



- (a) Quais são os equilíbrios? Quanto demora para ir de São Francisco para San José?
- (b) E se construirmos uma rodovia entre as montanhas e Cupertino como na segunda figura abaixo? O que acontece com o tempo de viagem? Por que essa situação é considerada paradoxal?



14. **(Jogos em redes sociais)** Considere a versão abaixo de um jogo de bem público “best-shot”. Por exemplo, considere que cada aluno de teoria dos jogos pode assinar um serviço de *streaming* a um custo 1 e compartilhar com os seus amigos. (Assuma que os jogadores gostam de seus amigos, e preferem compartilhar a custo zero a conta que não o fazer.) Já assistir *streaming* dá utilidade 2. Imagine que o grafo de amizade dos alunos de teoria dos jogos seja do formato abaixo, onde cada nóculo é um aluno e um vértice representa amizade. Caracterize os equilíbrios de Nash do jogo e dê um exemplo.

