Departamento de Economia
Universidade de São Paulo
EAE-1301 - Lista 1
Prof.: Pedro Forquesato
2º semestre de 2025

Instruções: Os workshops são resolvidos em grupo **durante a aula** com a ajuda dos colegas e do docente, mas cada aluno deve *escrever e entregar a lista separadamente*. Constitui **violações do código de ética** da disciplina:

- Olhar as resoluções escritas dos colegas;
- Escrever na lista dos colegas ou trocar anotações de respostas;
- Trazer para a aula qualquer tipo de resoluções dos exercícios do workshop.

Workshop 1. Jogos em forma normal

1. **(Galinha!)** Um dos jogos mais famosos em teoria dos jogos é o "chicken", baseado em uma "brincadeira"comum nos EUA no começo do século XX (ou pelo menos como representado em filmes, como no clássico Footloose), em que dois jovens correriam com o carro um na direção do outro, e o primeiro que saísse do caminho seria o covarde ("chicken").

   Se ambos desviarem é um empate, com *payoff* (por exemplo) zero. Se algum continuar e o outro desistir ele ganha, tendo a pequena (mas importante, para adolescentes) utilidade de chamar o outro de "chicken". Mas se ambos continuarem eles batem, perdendo o carro e quase certamente a vida. Uma representação possível do jogo está no gráfico abaixo. Ache todos os equilíbrios de Nash do jogo.

	Swerve	Straight
Swerve	0, 0	-1, +1
Straight	+1, -1	-1000, -1000

2. **(Caça ao cervo)** Outro jogo canônico em forma normal é o caça ao cervo, baseado em uma fábula de Rousseau. Dois caçadores podem se unir para caçar um cervo ou caçar sozinhos lebres. Se eles ambos caçarem o cervo, eles conseguem matá-lo, conseguindo 10kg de carne cada, mas não conseguem caçá-lo sozinho. Se ambos caçarem lebres, conseguem 5kg de carne cada, e se apenas um caçar lebres consegue 8kg. Esse jogo está exposto na matriz a seguir.

   (a) Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Escreva o jogo em forma normal. Quais são os equilíbrios de Nash em estratégias puras? (Aproveite e encontre o EN em estratégias mistas também.) Algum deles dá *payoff* maior a todos os agentes (i.e., é eficiente)? Chamamos esse EN de *equilíbrio payoff-dominant*.

(b) E se tiver uma probabilidade $\epsilon > 0$ de que o outro agente "erre a mão"e escolha a outra ação. Qual equilíbrio é melhor se ϵ não é pequeno demais? Chamamos esse EN de *equilíbrio risk-dominant*.

(c) Qual deles você jogaria se fosse um dos caçadores? E se você e o outro jogador pudessem se comunicar antes do jogo e fazer promessas ou recomendações, isso alteraria a sua decisão? Explique.

3. **(Dilema dos prisoneiros opcional)** De longe o jogo mais discutido e estudado na teoria dos jogos é o dilema dos prisioneiros. Aqui vamos examinar uma versão um pouco expandida dele, em que a participação é opcional.

   Além da história usual dos prisoneiros, outra interpretação, essa devida ao filósofo Douglas Hofstadter, é da troca de malas fechadas. Um comprador e um vendedor trocam malas fechadas, em que se entende que dentro está o objeto vendido e na outra o dinheiro da compra. Os agentes podem cooperar (entregar a mala cheia), trair (entregar uma mala vazia) ou desistir da transação. Veja na matriz abaixo.

	Cooperar	Trair	Abandonar
Cooperar	3,3	-5, 5	0,0
Trair	5, -5	-3,-3	0,0
Abandonar	0,0	0,0	0,0

   Quais são os equilíbrios de Nash (em estratégias puras e mistas) desse jogo? Você observa no mundo real as pessoas trocando malas fechadas com jóias e milhares de reais dentro?

4. **(Dominância Iterada)** No jogo abaixo, quais estratégias sobrevivem à *eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas (EIEED)*?

		Player 2		
		L	*C*	*R*
	U	6, 8	2, 6	8, 2
Player 1	*M*	8, 2	4, 4	9, 5
	D	8, 10	4, 6	6, 7

5. **(Racionabilidade)** Para o jogo abaixo, defina as funções de melhor-resposta para cada jogador. Quais são as estratégias racionais de cada um? E racionalizáveis?

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	$0, 7$	$2, 5$	$7, 0$	$0, 1$
a_2	$5, 2$	$3, 3$	$5, 2$	$0, 1$
a_3	$7, 0$	$2, 5$	$0, 7$	$0, 1$
a_4	$0, 0$	$0, -2$	$0, 0$	$10, -1$

6. **(Resolvível por dominância)** Um jogo é chamado "resolvível por dominância"se o processo de eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas leva a um único perfil sobrevivente de estratégias. Para os jogos abaixo, verifique se eles são resolvíveis por dominância, e em caso positivo, verifique que a alocação restante é um equilíbrio de Nash.

	L	R
H	4, 2	0, 1
T	1, 1	3, 3

Game A

	L	R
H	1, 3	2, 3
T	0, 4	0, 2

Game B

	a	b	c
γ	1, 0	3, 0	2, 1
β	3, 1	0, 1	1, 2
α	2, 1	1, 6	0, 2

Game C

7. **(Três jogadores)** Ache os equilíbrios de Nash do jogo com 3 jogadores abaixo.

	a	b
A	$0, 0, 5$	$0, 0, 0$
B	$2, 0, 0$	$0, 0, 0$

α

	a	b
A	$1, 2, 3$	$0, 0, 0$
B	$0, 0, 0$	$1, 2, 3$

β

	a	b
A	$0, 0, 0$	$0, 0, 0$
B	$0, 5, 0$	$0, 0, 4$

γ

8. **(Risco e estratégias maxmin)** Considere o jogo abaixo entre dois jogadores.

	L	R
T	2, 1	2, −20
M	3, 0	−10, 1
B	−100, 2	3, 3

(a) Ache todos os ENs do jogo. Eles são razoáveis no mundo real, quando é impossível ter certeza absoluta do que os outros jogadores irão fazer? Discuta.

(b) Agora ache as estratégias $\max\min$ dos dois jogadores e os seus *payoffs* garantidos. (Chamamos esses *payoffs* de **nível de segurança**.) Você seria racional e jogaria um equilíbrio de melhores-resposta ou "paranoico" e garantiria o seu nível de segurança nesse jogo?

9. **(Crenças não-deterministas)** O estudo de racionalidade e conhecimento como determinante de estratégias na teoria dos jogos é conhecido como *teoria dos jogos epistemológica*. Considere o seguinte problema: Angélica e Bárbara vão numa festa juntas, e estão decidindo que vestido usar. Cada uma tem a sua preferência de cores, mas tudo o que elas mais temem é chegar na festa e descobrir que estão de vestido igual! As utilidades estão (em linhas na ordem alfabética) na tabela abaixo.

blue	green	red	yellow	same color as friend
4	3	2	1	0
2	1	4	3	0

(a) Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Escreva o jogo na forma normal. Para Angélica, escolher amarelo é racional?

(b) E vermelho: existe alguma crença (talvez não-determinística) que racionaliza Angélica escolher o vestido vermelho?

(c) Faça o mesmo para Bárbara. Quais ações são as estratégias compatíveis com acreditar na racionalidade da amiga?

10. **(Equilíbrio correlacionado)** Na Batalha dos Sexos (em aula), o equilíbrio correlacionado nos deu um resultado mais justo que os equilíbrios de Nash em estratégia pura, e mais eficiente que o equilíbrio misto. Mas ele pode ser até mais poderoso que isso.

Ache um equilíbrio correlacionado do jogo de "chicken" abaixo, isto é, estratégias mistas dos agentes que são correlacionadas entre si (por observarem o mesmo sinal público) que gere uma soma de *payoffs* dos agentes maior que em qualquer equilíbrio de Nash do jogo (há 3 deles).

	L	R
T	$6,6$	$2,7$
B	$7,2$	$0,0$

11. **(Estratégias maxmin e equilíbrio de Nash)** Considere o jogo abaixo, apresentado em um artigo de 1972 pelo prêmio Nobel '05 Robert Aumann e Michael Maschler.

	L	R
L	$1,0$	$0,1$
R	$0,3$	$1,0$

   (a) Encontre o conjunto de ENs do jogo. Qual o *payoff* de cada jogador em equilíbrio?

   (b) Agora encontre as estratégias $\max\min$ de cada jogador e seus *níveis de segurança*. Compare-os com os *payoffs* em (a). O que você jogaria nesse jogo? Discuta.

12. **(Refinando o equilíbrio de Nash I)** Às vezes, alguns equilíbrios de Nash não condizem com a nossa intuição sobre o que seria uma estratégia sensata em cada situação. Assim, a literatura buscou eliminar equilíbrios "pouco razoáveis", levando a várias formas de **refinamentos** do Equilíbrio de Nash, isto é, condições de equilíbrio que são mais restritivas.

    Um refinamento importante, devido a Reinhard Selten (Nobel '94), é o *equilíbrio trembling-hands perfect*. Considere o jogo abaixo, onde A e B são números quaisquer maiores que zero (por exemplo, 10).

	L	M	R
U	1,1	0,0	1,1
M	0,0	0,0	0,B
D	1,1	A,0	1,1

(a) Quantos equilíbrios de Nash tem o jogo? Quais são eles?

(b) Agora, considere que os jogadores são "cautelosos", crendo que os oponentes possam ter "mãos trementes" e errarem com uma probabilidade ε muito pequena. Um equilíbrio de Nash então é **trembling-hands perfect** quando as estratégias do perfil de equilíbrio são sempre melhores respostas a *estratégias completamente mistas* dos oponentes que sejam suficientemente próximas do equilíbrio original (ε suficientemente próximo de zero). Ache os equilíbrios de Nash do jogo que são *trembling-hands perfect*.

13. **(Refinando o equilíbrio de Nash II)** Embora importante, o *equilíbrio trembling-hands perfect* também não é sempre convincente, como argumentou Roger Myerson (Nobel '07), já que ele pode ser sensível à adição de estratégias estritamente dominadas (como se pode ver em uma variante do exercício anterior). Ele propôs então a ideia de **proper equilibrium**, em que não apenas consideramos que os agentes sempre podem errar (portanto só aceitamos estratégias completamente mistas), mas adicionamos a restrição de que ações que dão um *payoff* menor (dadas as estratégias de equilíbrio do restante) sejam infinitamente menos prováveis nesses erros que ações que dão utilidade maior. Considere o jogo abaixo proposto por Myerson em seu artigo original de 1978:

Γ_2:

	(U_1,U_2)	Player 2: β_1	β_2	β_3
	α_1	1, 1	0, 0	-9,-9
Player 1	α_2	0, 0	0, 0	-7,-7
	α_3	-9,-9	-7,-7	-7,-7

(a) Quantos são os equilíbrios de Nash em estratégias puras do jogo? Quais?

(b) Quais deles são *trembling-hands perfect*? E *proper equilibria*? Interprete por que equilíbrios são eliminados por cada refinamento.

14. **(Equilíbrio correlacionado com três jogadores)** Considere o jogo apresentado na matriz abaixo, com três jogadores.

	L	R
T	$0,0,3$	$0,0,0$
B	$1,0,0$	$0,0,0$

A

	L	R
T	$2,2,2$	$0,0,0$
B	$0,0,0$	$2,2,2$

B

	L	R
T	$0,0,0$	$0,0,0$
B	$0,1,0$	$0,0,3$

C

Quais são os equilíbrios de Nash em estratégias puras? Ache um *equilíbrio correlacionado* em que o agente 3 escolhe B e os agentes 1 e 2 escolhem (T, L) e (B, R) com probabilidade igual. O agente B gostaria de observar o sinal comum usado no equilíbrio ou não?

15. **(Procedimento de Dekel-Fudenberg)** O processo de *eliminação iterada de estratégias fracamente dominadas* (EIEFD) representa uma hipótese comportamental de que os jogadores são "cautelosos", isto é, nunca eliminam completamente de consideração qualquer estratégia dos oponentes, mesmo que eles creem que há probabilidade zero delas serem jogadas. Aplique o EIEFD no jogo abaixo, e mostre que apenas um perfil de estratégias se mantém no jogo.

		II		
		L	**C**	**R**
	U	1.5,1.5	1.5,1.5	1.5,1.5
I	**M**	2,2	3,1	0,0
	D	2,2	0,0	1,3

Dekel e Fudenberg (1990), questionaram que a EIEFD entretanto depende de uma certeza muito forte dos jogadores sobre os *payoffs* dos outros jogadores. Eles sugeriram então o seguinte método para identificar perfis de estratégias compatíveis com conhecimento comum de racionalidade e de cautela: no primeiro estágio, elimina-se *todas* as estratégias fracamente dominadas (pois os jogadores têm certeza dos seus próprios *payoffs*). Após isso, como os jogadores podem cometer pequenos erros sobre os *payoffs* dos outros, elimina-se apenas estratégias *estritamente* dominadas. Esse método é conhecido como *procedimento de Dekel-Fudenberg*. Aplique-o ao jogo acima.

16. **(Crenças correlacionadas)** Quando há mais de dois jogadores, a definição de racionabilidade se torna mais complicada. Podemos permitir que os jogadores tenham crenças que

combinem as ações dos seus oponentes ("que eles vão jogar juntos"), isso é, correlacionadas, ou apenas estratégias independentes entre si (ainda que mistas)?[1]

Isso faz diferença! Considere o jogo abaixo em que há 3 jogadores, e o payoff de todos é igual para cada perfil de estratégias (o número nas caixas). Mostre que M_2 é racionalizável para o jogador 3 se aceitarmos crenças correlacionadas, mas não se restringirmos para crenças independentes. Verifique também que M_2 sobrevive a EIEED, como afirmado em aula.

	L	R
U	8	0
D	0	0

M_1

	L	R
U	4	0
D	0	4

M_2

	L	R
U	0	0
D	0	8

M_3

	L	R
U	3	3
D	3	3

M_4

[1] No primeiro caso, parte da literatura chama de *racionalidade correlacionada*, que vimos em aula que é equivalente a sobreviver à EIEED.